

Hong Kong Mathematics Olympiad (1989 – 90)

Heat Event (Individual)

香港数学竞赛 (1989 – 90)

初赛项目 (个人)

1. Find the value of  $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ .

求下式的值。

$$\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

2. If  $b < 0$  and  $2^{2b+4} - 20 \cdot 2^b + 4 = 0$ , find  $b$ .

若  $b < 0$  及  $2^{2b+4} - 20 \cdot 2^b + 4 = 0$ , 求  $b$ 。

3. If  $f(a) = a - 2$  and  $F(a, b) = a + b^2$ , find  $F(3, f(4))$ .

若  $f(a) = a - 2$ , 且  $F(a, b) = a + b^2$ , 求  $F(3, f(4))$ 。

4. For positive integers  $a$  and  $b$ , define  $a \# b = a^b + b^a$ . If  $2 \# w = 100$ , find the value of  $w$ .

对正整数  $a$  及  $b$ , 定义  $a \# b = a^b + b^a$ , 若  $2 \# w = 100$ , 求  $w$  的值。

5.  $a$  and  $b$  are constants. The straight line  $2ax + 3by = 4a + 12b$  passes through a fixed point  $P$  whose coordinates do not depend on  $a$  and  $b$ . Find the coordinates of  $P$ .

$a$  及  $b$  为常数。直线  $2ax + 3by = 4a + 12b$  恒过一定点  $P$  (其坐标与  $a$  和  $b$  无关)。求  $P$  点的坐标。

6. The sines of the angles of a triangle are in the ratio  $3 : 4 : 5$ . If  $A$  is the smallest interior angle of the triangle and  $\cos A = \frac{x}{5}$ , find the value of  $x$ .

某三角形各内角正弦的比为  $3 : 4 : 5$ 。若  $A$  为该三角形的最小内角, 且  $\cos A = \frac{x}{5}$ , 求  $x$  的值。

7. If  $x + y = 9$ ,  $y + z = 11$  and  $z + x = 10$ , find the value of  $xyz$ .

若  $x + y = 9$ 、 $y + z = 11$  及  $z + x = 10$ , 求  $xyz$  的值。

8. If  $\alpha, \beta$  are the roots of the equation  $2x^2 + 4x - 3 = 0$  and  $\alpha^2, \beta^2$  are the roots of the equation  $x^2 + px + q = 0$ , find the value of  $p$ .

若  $\alpha, \beta$  是方程  $2x^2 + 4x - 3 = 0$  的根, 且  $\alpha^2, \beta^2$  是方程  $x^2 + px + q = 0$  的根, 求  $p$  的值。

9. If  $x^{\log_{10} x} = \frac{x^3}{100}$  and  $x > 10$ , find the value of  $x$ .

若  $x^{\log_{10} x} = \frac{x^3}{100}$ , 且  $x > 10$ , 求  $x$  的值。

10. Given that  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  and  $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^n$  for positive integers  $n$ . Find  $a_4$ .

已知  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  及  $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^n$ , 其中  $n$  为正整数。求  $a_4$ 。

11. Find the unit digit of  $2137^{754}$ .

求  $2137^{754}$  的个位数。

12. If  $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 = 3$ , find  $r^3 + \frac{1}{r^3}$ .

若  $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 = 3$ , 求  $r^3 + \frac{1}{r^3}$ 。

13. A positive integer  $N$ , when divided by 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 and 2, leaves remainders 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 and 1 respectively. Find the least value of  $N$ .

正整数  $N$  被 10、9、8、7、6、5、4、3 及 2 除所得的余数依次是 9、8、7、6、5、4、3、2 及 1, 求  $N$  的最小值。

14. If  $\frac{1}{A} = \frac{\cos 45^\circ \sin 70^\circ \cos 60^\circ \tan 40^\circ}{\cos 340^\circ \sin 135^\circ \tan 220^\circ}$ , find the value of  $A$ .

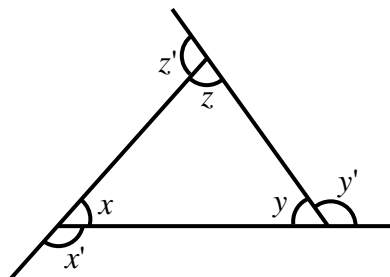
若  $\frac{1}{A} = \frac{\cos 45^\circ \sin 70^\circ \cos 60^\circ \tan 40^\circ}{\cos 340^\circ \sin 135^\circ \tan 220^\circ}$ , 求  $A$ 。

15. If 10 men can make 20 tables in 5 days, how many days are required to make 60 tables by 15 men?

若 10 人需要 5 天制成 20 张台, 15 人需要多少天制成 60 张台?

16. In the figure, the exterior angles of the triangle are in the ratio  $x' : y' : z' = 4 : 5 : 6$  and the interior angles are in the ratio  $x : y : z = a : b : 3$ . Find the value of  $b$ .

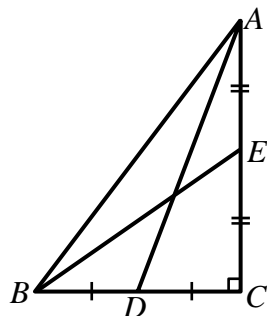
图 1 的三角形的三个外角的比是  $x' : y' : z' = 4 : 5 : 6$ , 而三个内角的比是  $x : y : z = a : b : 3$ , 求  $b$  的值。



(Figure 1)(图 1)

17. In  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$  and  $D, E$  are the mid-points of  $BC$  and  $CA$  respectively. If  $AD = 7$  and  $BE = 4$ , find the length of  $AB$ . (See figure 2.)

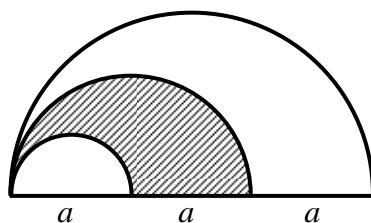
在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$  及  $D, E$  依次为  $BC, CA$  的中点。若  $AD = 7$  及  $BE = 4$ ，求  $AB$  的长度 (参考图 2)。



(Figure 2)(图 2)

18. Figure 3 shows 3 semi-circles of diameters  $a, 2a$  and  $3a$  respectively. Find the ratio of the area of the shaded part to that of the unshaded part.

图 3 中的三个半圆的直径分别为  $a, 2a$  及  $3a$ 。求阴影部分的面积与没有阴影部分的面积的比值。



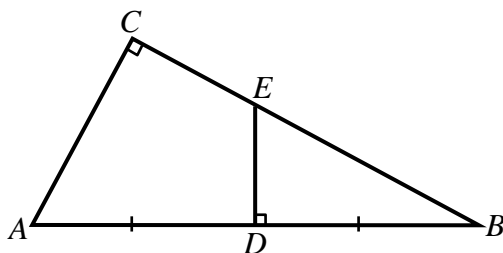
(Figure 3)(图 3)

19. Find the value of  $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20}$ .

求  $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20}$  的值。

20. In figure 4,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AD = DB$  and  $DE$  is perpendicular to  $AB$ . If  $AB = 20$  and  $AC = 12$ , find the area of the quadrilateral  $ADEC$ .

在图 4 中， $\angle C = 90^\circ$ 、 $AD = DB$  及  $DE$  垂直于  $AB$ 。若  $AB = 20$  及  $AC = 12$ ，求四边形  $ADEC$  的面积。



(Figure 4)(图 4)